

基于小波的图像插值方法

郝鹏威 朱重光

(中国科学院遥感应用研究所 北京 100101)

摘 要 本文在分析已有插值基函数和小波函数、小波变换的基础上提出一种应用小波作为插值基函数进行图像插值的方法,给出了该方法在一般图像插值方面和在多幅图像的信息揉合和累积方面的应用,并分析了一般图像插值方法在图像之间存在辐照度差异时的可行性和在同名点之间存在相对空间信息差异时的操作方法。最后,采用4幅 POLDER 多角度遥感图像对本文所述方法进行了验证。实验表明,本文所述方法是可以较好地进行图像插值的。

关键词 图像插值、插值基函数、小波、信息累积

1 引 言

图像插值在许多数字图像的应用中都起着很重要的作用^[1]。这些应用包括:为适应特殊显示设备而进行图像分辨率的转换;为使用户专注于图像的某个细节或获得图像的整体概貌而进行图像的放缩;为使图像的存储和传输效率提高而进行图像的压缩和重建;为进行图像几何变换而进行图像的重采样;等等。

图像插值就是从数字化的离散图像得到图像连续表示,即用已知的邻近像元来计算未知点处的像元值。这种邻近可以是未知点处的某个小的邻域,也可以大到整幅图像。计算一般采用邻近像元值的加权平均,且这种加权平均可以表现为信号的离散化采样与插值基函数之间的卷积。用以插值的基函数通常有:矩形函数、三角形函数、钟形函数、三次 B 样条函数及 Sinc 函数^[1-3]。对于插值基函数的不同选择会获得不同的插值效果,会有不同的插值误差,也会需要不同的计算量。

小波理论是近年来兴起的一种崭新的时(空)一频分析理论^[4]。小波函数具有时(空)域和频率域有限的窗口特性及时(空)一频窗的可随意选择性。小波的这些双窗口特性使得它在信号分析和图像分析中应用十分广泛。本文正是应用小波的这些性质把小波作为插值基函数进行图像插值的。本文的实验也表明,应用小波函数作为插值基函数会有计算量

少和插值误差小的双重特点。

2 图像插值的数学表示

对数字图像进行插值的一般公式为:

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) \cdot h(x, y, x_i, y_j) \quad (1)$$

其中 $f(x_i, y_j)$ 为数字化的离散图像,大小为 $M \times N$, $\tilde{f}(x, y)$ 为图像插值的结果, $h(x, y, x_i, y_j)$ 为插值基函数。

对于均匀采样的信号,插值的过程对应于在频域就是把因采样而引入信号频谱的周期性高频成分过滤去的过程。因此,插值过程也是一种滤波过程,插值基函数也就是一种滤波器了。对于线性二维时不变的系统,插值基函数可采用形式 $h(x - x_i, y - y_j)$ 或 $h_x(x - x_i) \cdot h_y(y - y_j)$, 也就是进行图像空间域的一般卷积或横纵向可分离卷积:

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) \cdot h_x(x - x_i) \cdot h_y(y - y_j) \quad (2)$$

插值基函数的选择有许多种,如矩形函数(0阶 B 样条)、三角形函数(一阶 B 样条)、钟形函数(二阶 B 样条)、三阶 B 样条(图 1a—d)等空间域有限但插值误差较大的函数,和 Sinc 函数(图 1e)等插值误差趋于 0 但空间域无限的函数。对空间域有限的基函数,计算时参予的邻近点少,计算量小,其插值误差随函数阶次升高而降低。但样条函数阶次再高便会引起 Gibbs 现象,起伏较大、不稳定,因而高于三次

收稿日期: 1997-04-07; 收到修改稿日期: 1997-07-13

的 B 样条也一般不使用。采用 Sinc 函数的最大弱点在于计算量大,而截断又会引起误差的出现。Sinc 函数对应频域的矩形函数,因而也可采用频域滤波

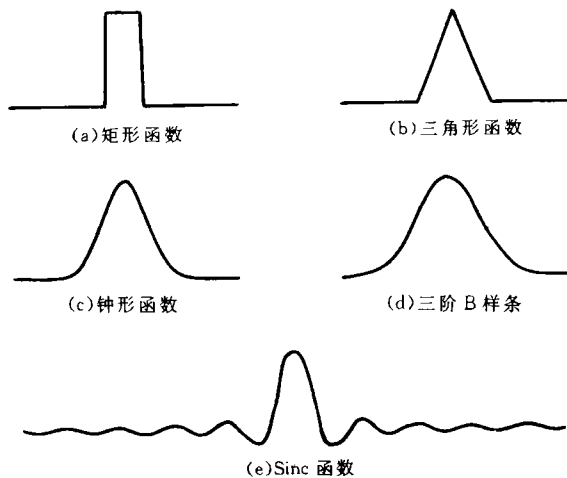


图1 一些基本的一维插值基函数的波形

Fig.1 Some one-dimensional interpolation waveforms

方法实现,但 FFT 和 IFFT 的计算量比用 Sinc 本身的计算量会更大。

使插值计算量减少,又使插值误差很小,是插值基函数选择缺一不可的两个标准。使插值计算量减少的办法是选择能很快衰减到零的或值域非零的范围小的插值基函数,也就是选择使参与卷积的信号采样点尽量少的插值基函数。插值的误差则取决于原信号或图像的性质,这只能假定原信号带限、能量有限、等等。

对于 T_x, T_y 间隔均匀采样的信号,若插值基函数 $h_x(x)$ 及 $h_y(y)$ 只在 $|x| \leq k_x T_x, |y| \leq k_y T_y$ 内非零,则对二维信号(数字图像)在 $|x - n_x T_x| \leq T_x / 2, |y - n_y T_y| \leq T_y / 2$ 内进行插值的数学表示一般为:

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{i=n_x-k_x}^{n_x+k_x} \sum_{j=n_y-k_y}^{n_y+k_y} f(x_i, y_j) \cdot h_x(x-x_i) \cdot h_y(y-y_j) \quad (3)$$

3 小波函数及小波变换

如果一个函数 $\psi(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (4)$$

及 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \cdot |\omega|^{-1} d\omega = C_\psi < \infty \quad (5)$

其中, $\hat{\psi}(\omega)$ 为 $\psi(t)$ 的 Fourier 变换,则 $\psi(t)$ 就是一个基本小波函数(图 2)。

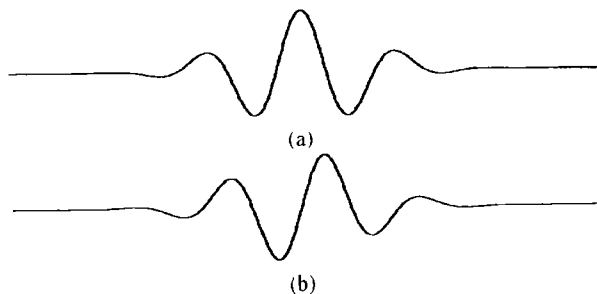


图2 两个一维小波函数的波形

Fig.2 Two waveforms of one dimensional wavelet

小波函数是一些在时(空)一频域都有限(或衰减足够快)的函数,它具有明显的双窗口特性。同时,通过放缩、平移又可生成一系列的小波函数簇:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (6)$$

适当选择尺度因子 a 和平移因子 b 两个参数可以很方便地选择小波函数的时(空)一频窗口的宽度和频率窗口的中心频率位置, $|a|$ 越小,则时宽越小、频宽越大、频窗向高频方向移动越远。

用小波函数簇可定义小波变换:

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{\psi}_{a,b}(t) dt \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

设 $\psi_a(t) = |a|^{-1/2} \bar{\psi}\left(\frac{-t}{a}\right)$, 则 $\bar{\psi}_{a,b}(t) = \psi_a(b-t)$ 。

可见,小波变换本质上是把小波函数作为带通滤波器进行滤波,并把原始信号分解为一系列频带上的信号。对于低频尺度而言,其小波变换所得之分量为低通信号分量。

而与小波变换相对应的小波反变换则是从分解到各频带上信号进行原始信号的重构:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi f)(a, b) \\ &\quad \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da \cdot db \end{aligned} \quad (8)$$

如果缺少高频尺度下的信号分量或一个信号是带宽有限的信号,则可认为该带宽频带以外的小波分量都为零,对该信号进行相应频窗的小波反变换所得到的连续信号也就可认为是对该信号的插值。事实上,小波的频窗特性是对 Sinc 函数的矩形频窗的一种很好的近似,同时由于其时窗特性使插值过程的计算量比 Sinc 函数要小得多。

把图像看作二维信号并分别对其进行 x, y 两个方向的小波变换即可很容易得到图像的小波变换和小波反变换公式。也同样, 如果一幅图像是空间频率有限的二维信号, 对该图像进行相应频窗的小波反变换所得到的二维连续信号就可认为是对该图像进行的插值。这也是本文基于小波的图像插值的基本原理。

用小波函数进行插值, 显然具有的(空)域有限(即计算量小)且插值误差小的双重特点, 是进行插值基函数的一种较理想的选择。

4 用于多幅图像信息累积的插值

对同一目标得到的不同角度、不同分辨率或不同位置的图像一定含有一些目标物空间互不包含的信息。如能把这些不同条件下获得的图像进行空间信息的累积和揉合, 那对于目标物详细空间信息的获取是十分有意义的。

如果把一些在不同条件下得到的图像相互之间配准且进行相应的几何纠正, 则可认为这些图像之间的空间信息差异发生在所有同名点(经纠正图像的同名点)附近, 信息的累积和揉合也将在这些同名点及附近像元之间进行。但是, 这种信息的累积存在两个问题: 一是图像之间辐照度有差异, 二是同名点之间的相对空间位置有一定的不确定性。

解决辐照度差异问题可用图像灰度直方图相互匹配法, 但在图像之间辐照度差异的空间分布严重不均匀时, 直方图的匹配正如直方图均衡不能使所有细节都增强一样也不能较好地解决这个问题。如果先不管其辐照度差异而采用一般图像插值方法直接进行图像插值和图像揉合, 然后再进行滤波以去掉辐照度差异引起的高频成分, 这样就可以得到较满意的结果。

事实上, 假设对一维信号 $f(t)$ 的 N 次数字化采样为 $\alpha_k \cdot f(\delta_k + iT)$, 其中, $k = 1, 2, 3, \dots, N; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \alpha_k$ 为一表达各次采样辐照度差异的正常数; δ_k 的取值范围为 $-T/2 < \delta_k \leq T/2$, 表示各次采样之间同名点处的位置不确定性。如果把辐照度差异看成是与信号位置有关的数值, 则可表示为采样位置的函数 $\alpha_k = \alpha(\delta_k + iT)$ 。显然, $\alpha(t)$ 是一个周期为 T 的周期函数, 对应频谱为间隔 $2\pi/T$ 的离散化谱线。由于 $\alpha(t) \cdot f(t)$ 的频谱为 $\alpha(t)$ 和 $f(t)$ 的 Fourier 变换的卷积, 有辐照度差异的信号的频谱将以 $2\pi/T$ 为周期重复, 但各周期能量相异。只要 $f(t)$ 的带宽在 π/T 以下, 该谱便不会发生混叠, 也就完

全可以通过滤波来重建原信号, 从而可以很好地解决辐照度差异问题。如果 $\alpha(t)$ 很平滑, 高频成分较小, 或 $f(t)$ 的频谱在 π/T 带宽外的高频成分很小, 则通过滤波也是可以较好地解决辐照度差异问题的。

解决同名点之间相对空间位置的不确定性, 可以采用使同名点之间的相对空间位置差异尽量减小的办法。但这已是一个非等间隔采样重建的问题, 用一般插值方法较为复杂^[5]。如果把每一图像通过插值放大到足够大, 再把纠正好的所有图像揉合在一起(像元相间插入), 然后对插补好的图像进行滤波和重采样, 则可达到减小图像间同名点空间位置差异的目的。以一维信号 $f(t)$ 的 N 次 T 间隔采样为例(对二维的数字图像, 已经过了图像配准和几何纠正), 其插值过程为:

① 把所有 N 次样本 $f_k^{(1)}(i_1 T)$ ($k = 1, 2, \dots, N; i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 分别插值放大 a ($a > 1$) 倍, 使其采样间隔缩小 a 倍, 变为 T/a : $f_k^{(2)}(i_2 T/a)$ ($k = 1, 2, \dots, N; i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

② 把经插值放大的结果揉合(相间插入): $f^{(3)}(i_3 T/aN) = f_k^{(2)}([i_3/N] \cdot T/a)$ ($[\cdot]$ 表示实数取整; $k = i_3 \bmod N; i_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。此时, 其采样间隔相当于 T/aN 。可见, a ($a > 1$) 愈大, 相间插入就使得同名点之间的相对空间位置差异愈小。

③ 把相间插入的结果经过滤波(时域卷积 $f^{(4)} = f^{(3)} * h$) 并以 T/N 间隔重采样: $f^{(4)}(i_4 T/N)$ ($i_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。在此结果中, 信息得到了累积和揉合。

如用小波作为插值基函数进行插值(小波反变换)和用小波作为滤波函数进行滤波(小波变换), 其操作过程如图 3。

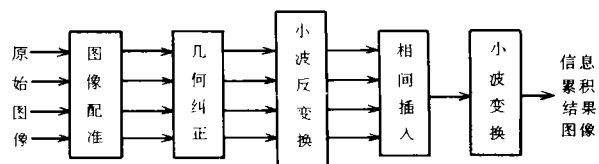
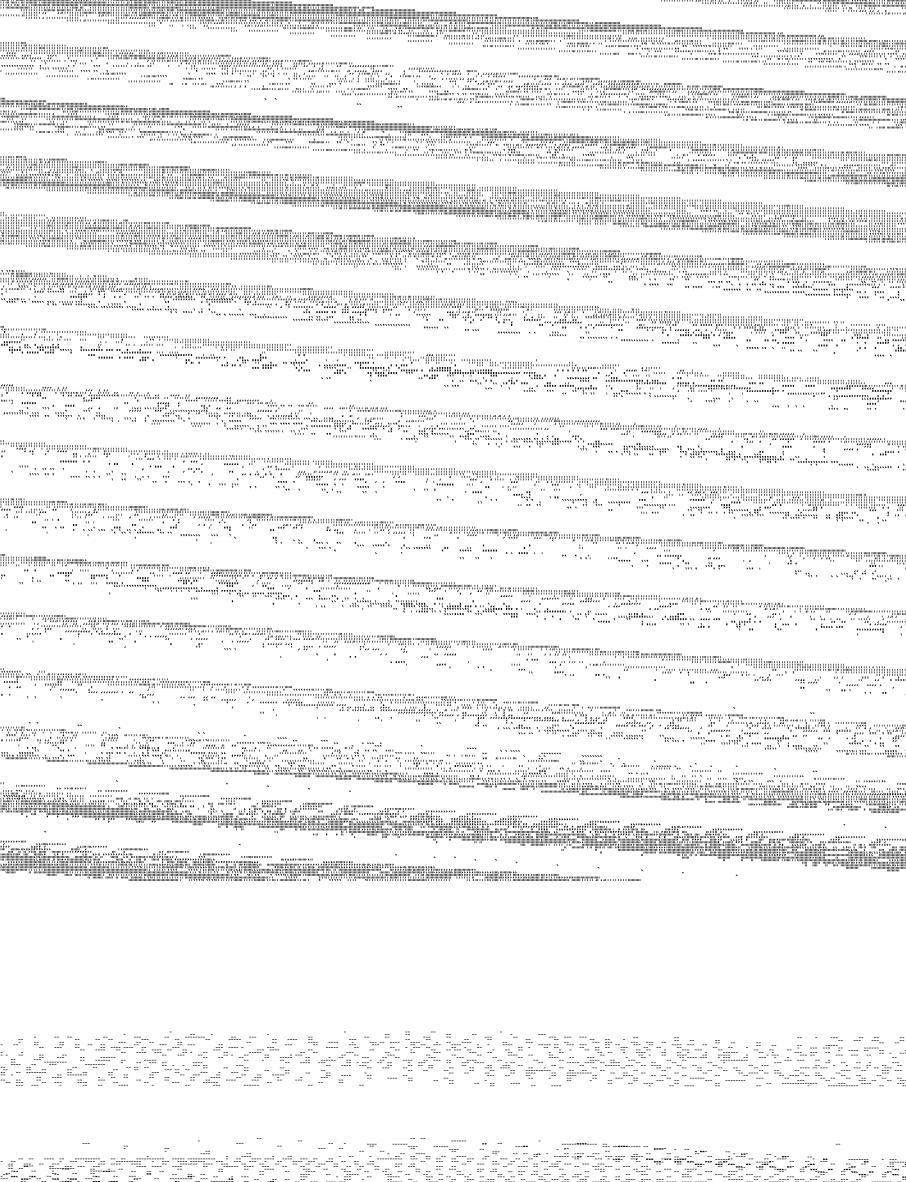


图3 基于小波的多幅图像插值和信息累积过程

Fig.3 Information accumulation of multi-frame images based on wavelets

5 实验与分析

为验证上述方法的正确性和有效性, 本文采用由法国 CNES 提供的 4 幅 POLDER 多角度遥感图像进行了图像插值实验。获得该组数据的飞行高



是: 图像的空间分辨率经插值后是否得到了提高? 如果是, 提高到了什么程度? 另外, 如果考虑原始图像中的点扩散函数问题或图像退化问题, 在图像插值过程中如何消除其影响? 这些问题有待进一步探讨。

参 考 文 献

- 1 W.K. Pratt. Digital Image Processing. Wiley, 1978.
- 2 R. J. Marks II. Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory. Springer-Verlag, 1991.
- 3 M. Unser, et al. Fast B-spline Transforms for continuous Image Representation and Interpolation. *IEEE Trans. PAMI*,

13, (3) 1991.

- 4 崔锦泰(程正兴译). 小波分析导论. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- 5 J. L. Yen. On the Nonuniform Sampling of Band Width Limited Signals. *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-3, Dec. 1956.

作 者 简 介

郝鹏威, 男, 1966年9月生。1988年毕业于西北工业大学计算机系, 现为中国科学院遥感应用研究所博士生, 主要从事科学可视化和数字图像处理方面的研究。

Image Interpolation Based on Wavelet

Hao Pengwei Zhu Chongguang

(Institute of Remote Sensing Applications, CAS Beijing 100101)

Abstract Image interpolation plays an important role in many applications of digital image. Some interpolation base functions, such as some time-limited functions, rectangle, triangle, bell, or cubic spline functions, and some precise functions, sinc function, have been used in signal or image interpolation. Meanwhile, a wavelet function has both of the satisfying properties for the interpolation base function, i.e. time-limited and precise. And the wavelet transformation gives a shortcut method for signal or image interpolation, which is the main idea of this paper. The new method can be applied not only to the general interpolation purpose but also to the image information synthesis and accumulation. The feasibility of the interpolation method applied in the image information synthesis and accumulation with frames of different radiance and the steps for images with coarse located corresponding points have also been discussed. The image interpolation experiments based on wavelet with 4 POLDER multiangular remote sensing images show that the new method is practical.

Key words Image interpolation, Interpolation base function, Wavelet, Information accumulation